はじめに

本テキストは，皆さんが無理なく基本をマスターし，かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに，知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり，さらに問題を解く力を確実にするために，演習問題Ａと演習問題Ｂが段階を追って配列してあります。また，分からない問題がでてきたら，すぐに基本事項や例題に戻って，新出の用語・公式・法則などを確認し，その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ，基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し，実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは，次のように構成されています。

- **▶基本事項**　問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。
- **▶例題**　基本事項で得た知識を，実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。
- **▶演習問題A**　ここに集めてある問題は，演習問題Ｂに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという，必要最低限のレベルです。解けた場合も，そうでない場合も，正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。
- **▶演習問題B**　標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら，問題に向かうと効果的です。

もくじ —— 数学A

第 1 講 場合の数

基本事項

1 集合の要素の個数

集合Aに対し，要素の個数を $n(A)$ で表す。

集合A，Bについて

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

とくに，$A\cap B=\phi$ のとき　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

Uが全体集合のとき　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

2 規則的な数えあげ

場合の数を求めるときの最も初歩的な方法は，条件を満たすものをすべて並べることである。

その際，もれなく，しかも重複もなくすべてのものを並べるためには，何らかの規準を設けて規則的に並べる必要がある。その規準として，辞書式の順序がよく使われる。また，樹形図をかいて数える方法も有効である。

3 和の法則

2つのことがらA，Bについて，Aの起こり方がm通り，Bの起こり方がn通りであり，AとBが同時に起こることはないとするとき，AまたはBの起こり方は $(m+n)$ 通り。

4 積の法則

2つのことがらA，Bについて，Aの起こり方がm通り，そのおのおのに対してBの起こり方がn通りのとき，Aの起こり方とBの起こり方を組にして考えたことがらの起こり方はmn通り。

「Aの起こり方とBの起こり方を組にしたことがらの起こり方」は，「AとBがともに起こる起こり方」と表現されることもある。

例題 1

100以下の自然数のうち，8の倍数の集合をA，12の倍数の集合をBとする。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) $n(A)$，$n(B)$ を求めよ。

(2) $n(A\cap B)$ を求めよ。

(3) $n(A\cup B)$ を求めよ。

解答

(1) 8の倍数の集合Aは

$$A=\{8\times1,\ 8\times2,\ \cdots,\ 8\times12\}$$

より，$n(A)=12$

12の倍数の集合Bは

$$B=\{12\times1,\ 12\times2,\ \cdots,\ 12\times8\}$$

より，$n(B)=8$

(2) $A\cap B$ は，8と12の最小公倍数24の倍数の集合だから　←8＝4×2，12＝4×3 より最小公倍数は $4\times2\times3=24$

$$A\cap B=\{24\times1,\ 24\times2,\ \cdots,\ 24\times4\}$$

$$n(A\cap B)=4$$

(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

に，(1)，(2)で求めた数値を代入して

$$n(A \cup B)=12+8-4=16$$

例題 2

大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が5以下になる場合は何通りあるか。

解答

大小2個のさいころの目を（大，小）で表すことにする。

目の和が5以下になる場合は

目の和が5…(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)　4通り

目の和が4…(1，3)，(2，2)，(3，1)　3通り

目の和が3…(1，2)，(2，1)　2通り

目の和が2…(1，1)　1通り

の全部で

$$4+3+2+1=10\text{（通り）}$$

例題 3

A，B，C，Dの4人が1回じゃんけんをするとき，次の問いに答えよ。

(1)　手の出し方は全部で何通りあるか。

(2)　AとBの2人が勝つ場合は何通りあるか。

(3)　2人が勝つ場合は何通りあるか。

解答

(1)　Aの手の出し方は，グー，チョキ，パーの3通り。　←じゃんけんの手の種類はグー，チョキ，パーの3種類

そのおのおのに対して，B，C，Dの手の出し方もそれぞれ3通りずつあるから，求める手の出し方は

$$3\times3\times3\times3=81\text{（通り）}$$　←積の法則

(2)　AとBの2人が勝つ場合は，A，B，C，Dの手を（A，B，C，D）で表すと

（A，B，C，D）＝（グー，グー，チョキ，チョキ）……①

（チョキ，チョキ，パー，パー）……②

（パー，パー，グー，グー）……③

の3通りある。

(3)　2人が勝つような手の出し方は(2)で求めた3通りの場合がある。

例えば①のとき，グーを出す2人を決めればよく，それはAとB，AとC，AとD，BとC，BとD，CとDの6通りある。

②，③のときもそれぞれ6通りずつあるから，求める場合の数は

$$6+6+6=18\text{（通り）}$$　←和の法則

例題 4

$x+y+z=8$ を満たす自然数 x，y，z の組は何通りあるか。

解答

$x=1$ のとき

←$x=1$，2，… と順に調べていく

$$y+z=7$$

これを満たす$(y,\ z)$は

$$(y,\ z)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$$

の 6 通り。

$x=2$ のとき

$$y+z=6$$

これを満たす$(y,\ z)$は

$$(y,\ z)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$$

の 5 通り。

$x=3$ のとき

$$y+z=5$$

これを満たす$(y,\ z)$は

$$(y,\ z)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$$

の 4 通り。

$x=4$ のとき

$$y+z=4$$

これを満たす$(y,\ z)$は

$$(y,\ z)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

の 3 通り。

$x=5$ のとき

$$y+z=3$$

これを満たす$(y,\ z)$は

$$(y,\ z)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

の 2 通り。

$x=6$ のとき

←$x \geqq 7$ のとき，$y+z \leqq 1$ となり，これを満たす自然数$(y,\ z)$は存在しない

$$y+z=2$$

これを満たす$(y,\ z)$は

$$(y,\ z)=(1,\ 1)$$

の 1 通り。

したがって，和の法則より，求める場合の数は

$$6+5+4+3+2+1=21(\text{通り})$$

例題 5

756 の正の約数はいくつあるか。

解答

756 を素因数分解すると，$2^2\times3^3\times7$ となる。

756 の正の約数は

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+7)$$

を展開したときに，すべてのものが 1 回ずつ現れるから，その個数は

$$3\times4\times2=24(\text{個})$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 756 \\ 2 & 378 \\ 3 & 189 \\ 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ & 7 \end{array}$$

演 習 問 題 A

1 200 以下の自然数について，次の問いに答えよ。

(1) 4 でも 5 でも割り切れる数の個数を求めよ。

(2) 4 または 5 で割り切れる数の個数を求めよ。

2 整数全体の集合を全体集合とし，$A=\{x\text{ は整数}\mid -1\leqq x<5\}$，$B=\{x\text{ は整数}\mid -3<x\leqq 4\}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $n(A\cap B)$を求めよ。

(2) $n(A\cup B)$を求めよ。

3 大小 2 個のさいころを同時に投げるとき， 2 個とも同じ目が出るか，または出る目の数の差が 1 になる場合は何通りあるか。

4 次の問いに答えよ。

(1) 大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 9 になる場合は何通りあるか。

(2) 大中小の 3 個のさいころを同時に投げるとき，目の和が 7 になる場合は何通りあるか。

5 10 を 3 個の自然数 x，y，z の和に分ける方法は何通りあるか。

6 A市とB市との間には道が3本，B市とC市との間には道が2本ある。これらの道を通り，A市からC市へ行く道は何通りあるか。

7 100円，50円，10円の3種類のどの硬貨も使って，420円を支払うには，各硬貨を何枚ずつ使えばよいか。ただし，使用する硬貨は全部で15枚以下とする。

8 りんご4個，柿2個，みかん6個がある。これらから，6個取り出す方法は何通りあるか。

9 360の正の約数はいくつあるか。

10 A市からB市へ行く道は3通り，B市からC市へ行く道は4通りある。A市からB市を通ってC市へ行き，行った道を通らずにB市を経てA市に帰る道筋は何通りあるか。

演習問題B

1 200から800までの整数について，次の問いに答えよ。

(1) 5でも7でも割り切れる数の個数を求めよ。

(2) 5または7で割り切れる数の個数を求めよ。

(3) 4では割り切れるが，5でも7でも割り切れない数の個数を求めよ。

2 集合A，Bは，全体集合Uの部分集合で

$$A\cup\overline{B}=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 15\},\ \overline{A\cap B}=\{6,\ 13,\ 15\}$$

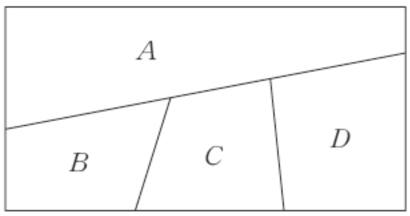
である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $n(U)$を求めよ。

(2) $n(A\cap B)$を求めよ。

3 異なるn個のx_1，x_2，……，x_nがある。この中から少なくとも1個をとって集合を作ると，全部でいくつできるか。

4 右図の4つの部分を，隣り合う部分が同じ色にならないようにして，異なる4色で塗り分ける方法は何通りあるか。ただし，使わない色があってもよいものとする。



5 次の問いに答えよ。

(1) 周の長さℓが一定である三角形の3辺の長さをa，b，c $(a\geqq b\geqq c)$とするとき，aのとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $\ell=60$で，a，b，cが整数であるような三角形の個数を求めよ。